第 5 期
2014 年 5 月
电　子　学　报
ACTA ELECTRONICA SINICA
Vol.42　No.5
May　2014

同标签 Vague 命题的 Lawry 乘-加逻辑与 Lawry 下-上确界逻辑

张兴芳，胡　凯

（聊城大学数学科学学院，山东聊城 252059）

摘　要： 作者在另一文中，基于 Lawry 的不确定模型，提出了一种新的非经典命题逻辑，称为同主语同标签 Vague 命题的 Lawry 逻辑．本文又扩充了它的研究对象，利用乘积和加法算子（下确界和上确界算子）引入了同标签 Vague 命题的 Lawry 乘-加（Lawry 下-上确界）真度的概念，并给出了它们的逻辑规律．由此，本文又提出了新的非经典命题逻辑，称为同标签 Vague 命题的 Lawry 乘-加（Lawry 下-上确界）逻辑．这两种非经典逻辑不仅新颖，而且相比 Lawry 的不确定模型适应面更广．

关键词： 非经典逻辑；Vague 命题；Lawry 逻辑；Lawry 乘-加逻辑；Lawry 下-上确界逻辑

中图分类号： O141.1　　**文献标识码：** A　　**文章编号：** 0372-2112（2014）05-1020-05

电子学报 URL： http://www.ejournal.org.cn　　**DOI：** 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.05.030

Lawry Product-Addition Logic and Lawry Infimum-Supfimum Logic of Vague Propositions on the Same Label

ZHANG Xing-fang, HU Kai

（*School of Mathematical Sciences, Liaocheng University, Liaocheng, Shandong* 252059, *China*）

Abstract： In the other one paper, a new non – classical logic, called Lawry logic of Vague propositions with same subject on same label was presented based on Lawry's uncertainty model. In the paper, its researchful object is extended. The concept of truth degree of Lawry product-adition (infimum-supremum) of vague propositions on same label, is introduced using product and addition (infimum and supremum), operators. Further, their logical laws are given. Consequently, non-classical logics, called Lawry Product-Addition (Lawry Infimum-Supremum) logic of vague propositions on same label, is presented. These two logics are novel, and comparing Lawry's uncertainty model, their applied scopes are wide.

Key words： non-classical logic; Vague proposition; Lawry logic; Lawry product-addition logic; Lawry infimum-supremum logic

1　引言

人们为了处理随机命题，提出了概率逻辑[1]；为了处理模糊命题，提出了模糊逻辑[2~7]．由于模糊逻辑不满足排中律和矛盾律，它们的科学性受到某些学者的怀疑[8,9]．本文作者也验证了这个事实[10]．事实上，模糊逻辑学者也注意到这个问题．它们在模糊逻辑系统中添加投射连接词 Δ[11]来消除这个弊病．众所周知，概率逻辑满足排中律和矛盾律，所以人们公认它处理随机命题是科学的．其实，它也能处理模糊命题．2004 年，Lawry 基于随机集，概率论和标签语义，提出了一种度量一类 Fuzzy 概念的方法（他称它为不确定模型）[12,13]．为了将这种理论与 Fuzzy 集理论区分开来，Lawry 称 Fuzzy 概念为 Vague 概念．按照 Lawry 的观点，我们可以用概率统计的方法评判 Vague 命题真的可能程度[14]．

针对 Vague 概念，比较 Lawry 的不确定模型[12,13]与模糊逻辑的思想方法，它们是两种不同的认知．虽然在 Lawry 的论文中没有提到命题和逻辑，但究其实质，Lawry 的不确定模型的实质是 Vague 命题的概率逻辑．

注意，Lawry 的不确定模型的适应范围有限，且这种描述形式不能扩张其应用范围．因此，作者在文[14]中首先通过引入同主语同标签 Vague 命题及其 Lawry 真度的概念，将 Lawry 的思想移植到命题逻辑中．从而建立了一种新型的非经典命题逻辑，称为同主语同标签 Vague 命题的 Lawry 逻辑，简称 Lawry 逻辑．本文再针对非同主语同标签的 Vague 命题类，通过使用两对算子：乘积和加法及下确界和上确界，扩张 Lawry 的思想．从而，又提出两种新的非经典命题逻辑，分别称它们为同

收稿日期：2012-02-18；修回日期：2013-08-15；责任编辑：蓝红杰

基金项目：国家自然科学基金（No.61273044）

标签 Vague 命题的 Lawry 乘-加逻辑和同标签 Vague 命题的 Lawry 下-上确界逻辑.

2 准备知识

2.1 Lawry 的不确定模型

设 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 是论域 Ω 上的一类(相关的)Vague 概念,记 $LA=\{L_1, L_2, \cdots, L_n\}$,称它为一个标签.

文[12,13]引入了标签表达式的概念.作者在文[14]中给出了它的一个等价定义如下:

定义 1(标签表达式) 设 $LA=\{L_1, L_2, \cdots, L_n\}$是一个论域 Ω 上的标签. LE 是一个由 LA 产生的型 $-(\neg, \wedge, \vee)$自由代数,即(1) $L_1, L_2, \cdots, L_n \in LE$;(2)若 $\varphi, \psi \in LE$,则$\neg \varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi \in LE$;(3) LE 中没有其它元素.称 LE 中的元素为标签表达式.

定义 2[12,13]((Ω, LA)上的群函数) 若对每个 $x \in \Omega$,存在一个映射 $m_x: 2^{LA} \to [0,1]$使得 $\sum_{F \subset LA} m_x(F)=1$,则称这种映射的全体$\{m_x \mid x \in \Omega\}$为$(\Omega, LA)$的群函数.

注意 m_x 可以看作集合 2^{LA}上的概率分布.

定义 3[12,13](λ-映射) 一个集映射称为 $\lambda-$映射 $\lambda: LE \to 2^{2^{LA}}$,如果它满足

(1) $\forall L \in LA, \lambda(L)=\{F \mid L \in F, F \subset LA\}$.

(2)若 $\varphi, \psi \in LE, \lambda(\neg \varphi)=(\lambda(\varphi))^c=2^{LA}-\lambda(\varphi)$, $\lambda(\varphi \wedge \psi)=\lambda(\varphi) \cap \lambda(\psi), \lambda(\varphi \vee \psi)=\lambda(\varphi) \cup \lambda(\psi)$.

定义 4[12,13](适当测度) 设$\{m_x \mid x \in \Omega\}$为$(\Omega, LA)$的群函数.适当测度 $\mu: LE \times \Omega \to [0,1]$定义如下, $\forall x \in \Omega, \forall \theta \in LE$,有 $\mu_\theta(x)=\sum_{F \in \lambda(\theta)} m_x(F)$.

定义 5[12,13](赋值) 映射 $v: LA \to \{0,1\}$称为 LA 上的一个赋值.它通过 $v(\neg \varphi)=1-v(\varphi), v(\varphi \wedge \psi)=\min\{v(\varphi), v(\psi)\}, v(\varphi \vee \psi)=\max\{v(\varphi), v(\psi)\}$推广到 LE 上每个公式的赋值.记 LA 上所有赋值的全体为 Val.

基于定义 5 可以分别定义 φ 推出ψ(记作 $\varphi \models \psi$), φ 逻辑等价ψ(记作 $\varphi \equiv \psi$), φ 是重言式与φ 是矛盾式的概念[13,14].

定理 1[12,13] 对于(Ω, LA)的任意群函数$\{m_x \mid x \in \Omega\}$, $\forall \varphi, \psi \in LE$,满足: $\forall x \in \Omega$,

(1)若 $\varphi \models \psi$,则 $u_\varphi(x) \leq u_\psi(x)$.

(2)若 $\varphi \equiv \psi$,则 $u_\varphi(x)=u_\psi(x)$.

(3)若 φ 是重言式,则 $u_\varphi(x)=1$.

(4)若 φ 是矛盾式,则 $u_\varphi(x)=0$.

(5) $u_{\neg \varphi}(x)=1-u_\varphi(x)$.

(6)若 $\varphi \wedge \psi$ 是矛盾式,则 $u_{\varphi \vee \psi}(x)=u_\varphi(x)+u_\psi(x)$.

(7) $\forall F \subseteq LA$,若 $\varphi_F=(\bigwedge_{L_i \in F} L_i) \wedge (\bigwedge_{L_i \notin F} \neg L_i)$,则 $u_{\varphi_F}(x)=m_x(F)$.

(8) $\mu_\varphi(x) \vee \mu_\psi(x) \leq \mu_{\varphi \vee \psi}(x) \leq \mu_\varphi(x)+\mu_\psi(x)$,
$\mu_\varphi(x)+\mu_\psi(x)-1 \leq \mu_{\varphi \wedge \psi}(x) \leq \mu_\varphi(x) \wedge \mu_\psi(x)$.

如果 $\theta \in LE$ 包含 $L_{i_1}, L_{i_2}, \cdots, L_{i_k} \in LA(k<n)$,则我们可记 $\theta=\theta(L_{i_1}, L_{i_2}, \cdots, L_{i_k})$.由经典逻辑知[15],若$\{L_{i_1}, L_{i_2}, \cdots, L_{i_k}\} \cup \{L_{i_{k+1}}, \cdots, L_{i_n}\}=LA$,则

$$\theta^*=\theta \wedge (L_{i_{k+1}} \vee \neg L_{i_{k+1}}) \vee (L_{i_{k+2}} \vee \neg L_{i_{k+2}}) \vee \cdots \vee (L_{i_n} \vee \neg L_{i_n})$$

与 $\theta=\theta(L_{i_1}, L_{i_2}, \cdots, L_{i_k})$可证等价,记作 $\theta \approx \theta^*$.我们称 $\theta^*(L_{i_1}, L_{i_2}, \cdots, L_{i_k}, L_{i_{k+1}}, \cdots, L_{i_n})$是 $\theta=\theta(L_{i_1}, L_{i_2}, \cdots, L_{i_k})$的扩张.

定义 6[14] 设 $E \subset F(LA)$.称标签表达式 $\bigvee_{w \in E \subset F(LA)} w$ 为析取范式.这里, $F(LA)=\{w_i=Q_{i1} \wedge \cdots \wedge Q_{ij} \wedge \cdots \wedge Q_{in} \mid Q_{ij} \in \{L_j, \neg L_j\}, j=1,2,\cdots,n, i=1,2,\cdots,2^n\}$.

由经典逻辑知[15],通过赋值集 Val,任何一个标签表达式 $\theta(L_1, L_2, \cdots, L_k) \in LE$ 对应一个函数 $v(\theta), v \in Val$,记它为 $f_\theta: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$,我们称它为标签表达式 θ 的真函数,并且任何一个非矛盾式 $\theta(L_{i_1}, L_{i_2}, \cdots, L_{i_k}) \in LE$ 等价于一个析取范式 $\bigvee_{f_{\theta^*}(v)=1, v=(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \{0,1\}^n} w_v$,即 $\theta \equiv \bigvee_{f_{\theta^*}(v)=1, v=(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \{0,1\}^n} w_v$.我们称它是 θ 的析取范式,这里 f_{θ^*}是 θ 的扩张θ^*的真函数.

定理 2[14] 若非矛盾式 $\theta(L_1, L_2, \cdots, L_n) \in LE$ 的析取范式是

$$\bigvee_{f_\theta(v)=1, v, v=(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \{0,1\}^n} (Q_{1v} \wedge Q_{2v} \wedge \cdots \wedge Q_{nv}),$$

则 $\forall x \in \Omega$,有

$$u_\theta(x)=\sum_{f_\theta(v)=1, v=(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \{0,1\}^n} m_x(\{L_{i_j} \in LA \mid y_j=1\}).$$

2.2 同主语同标签 Vague 命题的 Lawry 逻辑

为了以命题逻辑的形式体现 Lawry 处理 Vague 概念的思想,作者在文[14]中将 Lawry 的标签表达式的适当测度抽象为一类非经典命题的逻辑,称为同主语同标签 Vague 命题的 Lawry 逻辑.

在 Lawry 逻辑中,为了区分模糊逻辑连接词"非$\neg$","并且$\wedge$"和"或者$\vee$",使用$\sim, \cap, \cup$表示 Lawry 逻辑连接词"非","并且"和"或者".

定义 7[14] 设 $LA=\{L_1, L_2, \cdots, L_n\}$是论域 Ω 上的标签.任意 $x \in \Omega$,记 $LA(x)=\{L(x) \mid L \in LA\}$,称 $LA(x)$中的元素为原子主语 x 的 Vague 命题. $LE(x)$是一个由 $LA(x)$产生的型$-(\sim, \cap, \cup)$自由代数,即

(1) $\forall L \in LA, L(x) \in LE(x)$.

(2)若 $\varphi(x), \psi(x) \in LE(x)$,则$\sim \varphi(x), \varphi(x) \cap \psi(x), \varphi(x) \cup \psi(x) \in LE(x)$.

(3) $LE(x)$中没有其它元素.

称 $LE(x)$中的元素为同主语 x 同标签的 Vague 命题,或简称同主语同标签的 Vague 命题.

由定义 7,对于给定的 $x\in\Omega$,任给一个同主语 x 同标签的 Vague 命题 $\theta(x)\in LE$,只要用$\neg,\wedge,\vee,L_1,L_2,\cdots,L_n$ 分别代替$\theta(x)$中的$\sim,\cap,\cup,L_1(x),L_2(x),\cdots,L_n(x)$即可得到 LE 中的唯一元素,记为 θ,我们称它为$\theta(x)$的伴随表达式;反之也成立.因此,$LE(x)$的元素和 LE 中的元素是一一对应的.例如 $LA=\{L_1,L_2,L_3\}$,则$(\neg L_1\vee L_2)\wedge L_3\in LE$ 是$(\sim L_1(x)\cup L_2(x))\cap L_3(x)\in LE(x)$的伴随表达式.如果 L_1,L_2,L_3 分别表示 Vague 概念"低温度","中等温度"和"高温度",则$(\sim L_1(x)\cup L_2(x))\cap L_3(x)\in LE(x)$表示命题"$x$ 不隶属于低温度或者隶属于中等温度,且隶属于高温度".而$(\neg L_1\vee L_2)\wedge L_3\in LE$ 表示词语"非低温度或者中等温度且高温度".

定义 8[14] 设$\{m_x\mid x\in\Omega\}$是(Ω,LA)的群函数,$\forall\theta(x)\in LE(x)$,称 $t_{La}(\theta(x))=\mu_\theta(x)$为同主语 x 同标签 Vague 命题 $\theta(x)$的 Lawry 真度,这里 $\mu_\theta(x)$是标签表达式 θ 的适当测度.

注意如果 L_1 表示中等温度,10 代表 10 摄氏度,则在 Lawry 的不确定模型[13]中 $\mu_{L_1}(10)=\dfrac{1}{3}$解释为命题"10 摄氏度属于低温度"的适当测度为$\dfrac{1}{3}$".通过定义 8 和 9,符号 $L_1(10)$表示命题"10 摄氏度属于低温度",符号 $t_{La}(L_1(10))$解释为"10 摄氏度属于低温度"真的可能程度(简称 Lawry 真度)".

显然,标签表达式中赋值,逻辑推出$\models$,等价,重言式,矛盾式,真函数,析取范式等概念都可以移植到 $LE(x)$中来.由此,标签表达式的适当测度的性质也完全可以移植到同主语同标签 Vague 命题中.文[14]提供了其逻辑规律(略).我们称这种逻辑为同主语同标签 Vague 命题的 Lawry 逻辑,简称 Lawry 逻辑.

3 同标签 Vague 命题的 Lawry 乘-加逻辑和 Lawry 下-上确界逻辑

注意 Lawry 逻辑的适应对象仅仅是包含同主语同标签的原子 Vague 命题的命题.自然地,我们需要考虑如何处理包含不同主语的同标签的原子 Vague 命题的命题.比如,如何以 Lawry 的思想为基础,度量命题"摄氏 10 度是低温度或摄氏 12 度是中等温度"真的可能程度呢? 显然,直接以 Lawry 的标签表达式的适当测度的表达形式,难以扩张 Lawry 的思想.然而,以 Lawry 逻辑为基础,可以较方便地实现扩张 Lawry 的思想的目的.下面我们将基于 Lawry 逻辑建立两种应用范围更广的新的非经典命题逻辑.

定义 9 设 LA 是论域Ω 上的标签,$\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}\subset\Omega$,$S=LA(x_1)\cup LA(x_2)\cup\cdots\cup LA(x_n)\cup\cdots$,$F(S)$是一个由 S 产生的型$-(\sim,\cap,\cup)$自由代数,即(1)$\forall L(x)\in S,L(x)\in F(S)$;(2) 若 $\varphi,\psi\in F(S)$,则$\sim\varphi,\varphi\cap\psi,\varphi\cup\psi\in F(S)$;(3)$F(S)$中没有其它元素.则称 S 中的元素为原子同标签 Vague 命题,$F(S)$中的元素为同标签 Vague 命题.

定义新的连接词$\rightarrow$如下:$\forall\varphi,\psi\in F(S),\varphi\rightarrow\psi=\sim\varphi\cup\psi$.连接词的运算顺序是先$\sim$然后$\cap,\cup$再$\rightarrow$.

例 1 设 $LA=\{L_1,L_2,L_3,L_4\}$是论域 $\Omega=[1,100]$上的标签,$\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}\subset\Omega$,

$S=LA(x_1)\cup LA(x_2)\cup\cdots\cup LA(x_n)\cup\cdots$

$\varphi=\varphi(L_1(x_1),L_2(x_1),L_2(x_2),L_3(x_3))=(\sim L_1(x_1)\cap L_2(x_1))\cup L_2(x_2)\rightarrow L_3(x_3)\in F(S)$.

如果记 $P_{x_1}=\{L_1(x_1),L_2(x_1)\}\subset LA(x_1)$,$P_{x_3}=\{L_3(x_3)\}\subset LA(x_3)$,$P_{x_2}=\{L_2(x_2)\}\subset LA(x_2)$,则 $\varphi=\varphi(L_1(x_1),L_2(x_1),L_2(x_2),L_3(x_3))$,可以记作

$\varphi(L_1(x_1),L_2(x_1),L_2(x_2),L_3(x_3))=\varphi(P_{x_1},P_{x_2},P_{x_3})$.

因为 $\varphi=\varphi(L_1(x_1),L_2(x_1),L_2(x_2),L_3(x_3))=(\sim L_1(x_1)\cap L_2(x_1))\cup L_2(x_2)\rightarrow L_3(x_3)$的真函数是

$f_\varphi(y_1,y_2,y_3,y_4)=((1-y_1)\wedge y_2)\vee y_3\rightarrow y_4$,$y_1,y_2,y_3,y_4\in\{0,1\}$,

$\{(y_1,y_2,y_3,y_4)\mid f_\varphi(y_1,y_2,y_3,y_4)=1\}$

$=\{(0,0,0,0),(1,0,0,0),(1,1,0,0)\}\cup\{(y_1,y_2,y_3,1)\mid y_1,y_2,y_3\in\{0,1\}\}$,所以 φ 的析取范式是

$$
\begin{aligned}
&(\sim L_1(x_1)\cap\sim L_2(x_1)\cap\sim L_2(x_2)\cap\sim L_3(x_3))\\
&\cup(L_1(x_1)\cap\sim L_2(x_1)\cap\sim L_2(x_2)\cap\sim L_3(x_3))\\
&\cup(L_1(x_1)\cap L_2(x_1)\cap\sim L_2(x_2)\cap\sim L_3(x_3))\\
&\cup(L_1(x_1)\cap L_2(x_1)\cap\sim L_2(x_2)\cap L_3(x_3))\\
&\cup(L_1(x_1)\cap L_2(x_1)\cap L_2(x_2)\cap L_3(x_3))\\
&\cup(L_1(x_1)\cap\sim L_2(x_1)\cap\sim L_2(x_2)\cap L_3(x_3))\\
&\cup(L_1(x_1)\cap\sim L_2(x_1)\cap L_2(x_2)\cap L_3(x_3))\\
&\cup(\sim L_1(x_1)\cap L_2(x_1)\cap\sim L_2(x_2)\cap L_3(x_3))\\
&\cup(\sim L_1(x_1)\cap L_2(x_1)\cap L_2(x_2)\cap L_3(x_3))\\
&\cup(\sim L_1(x_1)\cap\sim L_2(x_1)\cap\sim L_2(x_2)\cap L_3(x_3))\\
&\cup(\sim L_1(x_1)\cap\sim L_2(x_1)\cap L_2(x_2)\cap L_3(x_3)).
\end{aligned}
$$

这里注意,$P_{x_1}=\{L_1(x_1)L_2(x_1)\}\subset LA(x_1)$,$P_{x_2}=\{L_2(x_2)\}\subset LA(x_2)$,$P_{x_3}=\{L_3(x_3)\}\subset LA(x_3)$.

为了便于后面的表述,一般地,若 $P_{x_1}\subset LA(x_1)$,$P_{x_2}\subset LA(x_2),\cdots,P_{x_n}\subset LA(x_n)$,则 $\varphi(P_{x_1},P_{x_2},\cdots,P_{x_n})$表示包含 $P=p_{x_1}\cup p_{x_2}\cup...\cup p_{x_n}$ 中所有元素的同标签 Vague 命题.

定义 10　设 $\varphi=\varphi(P_{x_1},P_{x_2},\cdots,P_{x_n})\in F(S)$，$P=P_{x_1}\cup P_{x_2}\cup\cdots\cup P_{x_n}$ 的基数是 $k(k\geq n)$. $\{m_x\mid x\in\Omega\}$ 是 (Ω,LA) 的任意群函数. 如果 $\varphi=\varphi(P_{x_1},P_{x_2},\cdots,P_{x_n})$ 的析取范式

$$\bigcup_{f_\varphi(v)=1,v=(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in\{0,1\}^k}(Q_{1v}\cap Q_{2v}\cap\cdots\cap Q_{kv})$$
$$=\bigcup_{f_\varphi(v)=1,v=(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in\{0,1\}^k}(P_{x_1v}\cap P_{x_2v}\cap\cdots\cap P_{x_nv}),$$

则称

$$T^{\text{II}}(\varphi)=\sum_{f_\varphi(v)=1,v=(y_1,y_2,\cdots,y_k)\in\{0,1\}^k}t_{La}(P_{x_{1v}})\times t_{La}(P_{x_{2v}})\times\cdots\times t_{La}(P_{x_nv})$$

为 φ 的 Lawry 乘-加真度，这里，$P_{x_1}\subset LA(x_1)$，$P_{x_2}\subset LA(x_2)$，$\cdots$，$P_{x_n}\subset LA(x_n)$，P_{x_jv}，$j=1,2,\cdots,n$，按照下列原则定义：对于每个 $v=(y_1,y_2,\cdots,y_k)\in\{0,1\}^k$，若在 $Q_{1v}\cap Q_{2v}\cap\cdots.\cap Q_{kv}$ 中包含 P_{x_j} 的合取式是 $Q_{lv}\cap Q_{(l+1)v}\cap\cdots\cap Q_{(l+m)v}$，则 $P_{x_jv}=Q_{lv}\cap Q_{(l+1)v}\cap\cdots\cap Q_{(l+m)v}$.

例如，例 1 中 φ 的析取范式是

$$(\sim L_1(x_1)\cap\sim L_2(x_1)\cap\sim L_2(x_2)\cap\sim L_3(x_3))$$
$$\cup(L_1(x_1)\cap\sim L_2(x_1)\cap\sim L_2(x_2)\cap\sim L_3(x_3))$$
$$\cup(L_1(x_1)\cap L_2(x_1)\cap\sim L_2(x_2)\cap\sim L_3(x_3))$$
$$\cup(L_1(x_1)\cap L_2(x_1)\cap\sim L_2(x_2)\cap L_3(x_3))$$
$$\cup(L_1(x_1)\cap L_2(x_1)\cap L_2(x_2)\cap L_3(x_3))$$
$$\cup(L_1(x_1)\cap\sim L_2(x_1)\cap\sim L_2(x_2)\cap L_3(x_3))$$
$$\cup(L_1(x_1)\cap\sim L_2(x_1)\cap L_2(x_2)\cap L_3(x_3))$$
$$\cup(\sim L_1(x_1)\cap L_2(x_1)\cap\sim L_2(x_2)\cap L_3(x_3))$$
$$\cup(\sim L_1(x_1)\cap L_2(x_1)\cap L_2(x_2)\cap L_3(x_3))$$
$$\cup(\sim L_1(x_1)\cap\sim L_2(x_1)\cap\sim L_2(x_2)\cap L_3(x_3))$$
$$\cup(\sim L_1(x_1)\cap\sim L_2(x_1)\cap L_2(x_2)\cap L_3(x_3)).$$

它等价于

$$((\sim L_1(x_1)\cap\sim L_2(x_1))\cap\sim L_2(x_2)\cap\sim L_3(x_3))$$
$$\cup((L_1(x_1)\cap\sim L_2(x_1))\cap\sim L_2(x_2)\cap\sim L_3(x_3))$$
$$\cup((L_1(x_1)\cap(L_2(x_1))\cap\sim L_2(x_2)\cap\sim L_3(x_3))$$
$$\cup((L_1(x_1)\cap(L_2(x_1))\cap\sim L_2(x_2)\cap L_3(x_3))$$
$$\cup((L_1(x_1)\cap(L_2(x_1))\cap L_2(x_2)\cap L_3(x_3))$$
$$\cup((L_1(x_1)\cap(\sim L_2(x_1))\cap\sim L_2(x_2)\cap L_3(x_3))$$
$$\cup((L_1(x_1)\cap(\sim L_2(x_1))\cap L_2(x_2)\cap L_3(x_3))$$
$$\cup((\sim L_1(x_1)\cap(L_2(x_1))\cap\sim L_2(x_2)\cap L_3(x_3))$$
$$\cup((\sim L_1(x_1)\cap(L_2(x_1))\cap L_2(x_2)\cap L_3(x_3))$$
$$\cup((\sim L_1(x_1)\cap\sim L_2(x_1))\cap\sim L_2(x_2)\cap L_3(x_3))$$
$$\cup((\sim L_1(x_1)\cap\sim L_2(x_1))\cap L_2(x_2)\cap L_3(x_3)).$$

对于 $v=(0,0,0,0)$，$P_{x_1v}=\sim L_1(x_1)\cap\sim L_2(x_1)$，$P_{x_2v}=\sim L_2(x_2)$，$P_{x_3v}=\sim L_3(x_3)$.

显然，经典逻辑[15]或标签表达式中赋值，逻辑推出 $\models$，等价，重言式，矛盾式，Boolean 函数，析取范式等概念都可以移植到 $F(S)$ 中来.

定理 3　设 $\varphi,\psi\in F(S)$.

(1)若 $\varphi\models\psi$，则 $T^{\text{II}}(\varphi)\leq T^{\text{II}}(\psi)$.

(2)若 φ 是重言式(矛盾式)，则 $T^{\text{II}}(\varphi)=1(0)$.

(3) $T^{\text{II}}(\sim\varphi)=1-T^{\text{II}}(\varphi)$.

(4) $T^{\text{II}}(\varphi)\vee T^{\text{II}}(\psi)\leq T^{\text{II}}(\varphi\cup\psi)\leq T^{\text{II}}(\varphi)+T^{\text{II}}(\psi)$.

(5) $T^{\text{II}}(\varphi)+T^{\text{II}}(\psi)-1\leq T^{\text{II}}(\varphi\cap\psi)\leq T^{\text{II}}(\varphi)\wedge T^{\text{II}}(\psi)$.

证明　(1)～(3)是显然的. (4)设 φ 与 ψ 包含的所有原子 Vague 命题集为 $Q=P_{x_1}\cup P_{x_2}\cup\cdots\cup P_{x_n}$，且 $\varphi=\varphi(P_{x_1},P_{x_2},\cdots,P_{x_n})\equiv\bigcup_{f_\varphi(v)=1}(Q_{1v}\cap Q_{2v}\cap\cdots\cap Q_{nv})=\bigcup_{f_\varphi(v)=1}W_v$，

$\psi=\psi(P_{x_1},P_{x_2},\cdots,P_{x_n})\equiv\bigcup_{f_\psi(v)=1}(Q_{1v}\cap Q_{2v}\cap\cdots\cap Q_{nv})=\bigcup_{f_{\psi^*}(v)=1}w_v$. 显然

$\{w_v\mid f_\varphi(v)=1,v\in\{0,1\}^{\mid n}\}\subset\{w_v\mid f_{\varphi\cup\psi}(v)=1,v\in\{0,1\}^n\}$，

$\{w_v\mid f_\psi(v)=1,v\in\{0,1\}^n\}\subset\{w_v\mid f_{\varphi\cup\psi}(v)=1,v\in\{0,1\}^n\}$，

所以 $T^{\text{II}}(\varphi)\vee T^{\text{II}}(\psi)\leq T^{\text{II}}(\varphi\cup\psi)$. 因为

$\{w_v\mid f_{\varphi\cup\psi}(v)=1,v\in\{0,1\}^n\}$
$=\{w_v\mid f_\varphi(v)=1,v\in\{0,1\}^n\}\cup\{w_v\mid f_\psi(v)=1,v\in\{0,1\}^n\}-\{w_v\mid f_{\varphi\cap\psi}(v)=1,v\in\{0,1\}^n\}$.

所以 $T^{\text{II}}(\varphi\cup\psi)\leq T^{\text{II}}(\varphi)+T^{\text{II}}(\psi)$.

因此 $T^{\text{II}}(\varphi)\vee T^{\text{II}}(\psi)\leq T^{\text{II}}(\varphi\cup\psi)\leq T^{\text{II}}(\varphi)+T^{\text{II}}(\psi)$.

(5)因为 $\{w_v\mid f_\varphi(v)=1,v\in\{0,1\}^n\}\supset\{w_v\mid f_{\varphi\cap\psi}(v)=1,v\in\{0,1\}^n\}$，

$\{w_v\mid f_\psi(v)=1,v\in\{0,1\}^{n\mid}\}\supset\{w_v\mid f_{\varphi\cap\psi}(v)=1,v\in\{0,1\}^n\}$，

所以 $T^{\text{II}}(\varphi\cap\psi)\leq T^{\text{II}}(\varphi)\wedge T^{\text{II}}(\psi)$.

注意 $\sim(\varphi\cap\psi)\equiv\sim\varphi\cup\sim\psi$，则由(3)知 $T^{\text{II}}(\varphi\cap\psi)=1-T^{\text{II}}(\sim\varphi\cup\sim\psi)$. 又由(5)知 $T^{\text{II}}(\varphi\cup\psi)\leq T^{\text{II}}(\varphi)+T^{\text{II}}(\psi)$. 所以

$T^{\text{II}}(\varphi)+T^{\text{II}}(\psi)-1=1-(1-T^{\text{II}}(\varphi)+1-T^{\text{II}}(\psi))\leq T^{\text{II}}(\varphi\cap\psi)$.

因此 $T^{\text{II}}(\varphi)+T^{\text{II}}(\psi)-1\leq T^{\text{II}}(\varphi\cap\psi)\leq T^{\text{II}}(\varphi)\wedge T^{\text{II}}(\psi)$.

定理 4　φ 是重言式(矛盾式)的充要条件是对于 (Ω,LA) 的任意群函数 $\{m_x\mid x\in\Omega\}$ φ 的 Lawry 乘-加真度等于 1(0).

该定理的必要性是定理 3(2)，其充分性是显然的.

定义 11　设 $\varphi=\varphi(P_{x_1},P_{x_2},\cdots,P_{x_n})\in F(S)$，$P=P_{x_1}\cup P_{x_2}\cup\cdots\cup P_{x_n}$ 的基数是 k. $\{m_x\mid x\in\Omega\}$ 是 (Ω,LA) 的任意群函数. 如果 $\varphi=\varphi(P_{x_1},P_{x_2},\cdots,P_{x_n})$ 的析取

范式

$$\bigcup_{f_\varphi(v)=1,v=(y_1,y_2,\cdots,y_k)\in\{0,1\}^k}(Q_{1v}\cap Q_{2v}\cap\cdots\cap Q_{kv})=\bigcup_{f_\varphi(v)=1,v=(y_1,y_2,\cdots,y_k)\in\{0,1\}^k}(P_{x_1v}\cap P_{x_2v}\cap\cdots\cap P_{x_nv}),$$

则我们称

$$T^{\wedge}(\varphi)=\begin{cases}\bigvee_{f_\varphi(v)=1,v=(y_1,y_2,\cdots,y_k)\in\{0,1\}^k}\bigwedge_{1\le i\le n}t_{La}(P_{x_{iv}}), \\ \bigvee_{f_\varphi(v)=1,v=(y_1,y_2,\cdots,y_k)\in\{0,1\}^k}\bigwedge_{1\le i\le n}t_{La}(P_{x_{iv}})<0.5 \\ 1-\bigvee_{f_\varphi(v)=0,v=(y_1,y_2,\cdots,y_k)\in\{0,1\}^k}\bigwedge_{1\le i\le n}t_{La}(P_{x_{iv}}), \\ \bigvee_{f_\varphi(v)=1,v=(y_1,y_2,\cdots,y_k)\in\{0,1\}^k}\bigwedge_{1\le i\le n}t_{La}(P_{x_{iv}})\ge 0.5\end{cases}$$

为 φ 的 Lawry 下-上确界真度,这里,$P_{x_1}\subset LA(x_1)$,$P_{x_2}\subset LA(x_2)$,$\cdots$,$P_{x_n}\subset LA(x_n)$,且 P_{x_jv},$j=1,2,\cdots,n$ 按照下列原则定义:对于每个 $v=(y_1,y_2,\cdots,y_k)\in\{0,1\}^k$,若在 $Q_{1v}\cap Q_{2v}\cap\cdots\cap Q_{kv}$ 中包含 P_{x_j} 的合取式是 $Q_{lv}\cap Q_{(l+1)v}\cap\cdots\cap Q_{(l+m)v}$,则 $P_{x_jv}=Q_{lv}\cap Q_{(l+1)v}\cap\cdots\cap Q_{(l+m)v}$.

同标签 Vague 命题的 Lawry 下-上确界真度的性质与 Lawry 乘-加真度类似,略.

概括上述思想,我们又提出了两种新的非经典逻辑.它们分别称为同标签 Vague 命题的 Lawry 乘-加逻辑与同标签 Vague 命题的 Lawry 下-上确界逻辑.注意这两种逻辑具有与经典逻辑优良的和谐性.

参考文献

[1] Nilsson N. Probability logic[J]. Artificial Intelligence, 1986, 28:71 – 78.

[2] 王国俊.一种模糊命题的演算系统[J].中国科学(F), 1997,42(10):1041 – 1044.
Wang guojun. A fuzzy proposition calculus system[J]. Science in China Ser F, 1997, 42(10):1041 – 1044.(in Chinese)

[3] Hajek P. Metamathematics of Fuzzy Logic[M]. Lodon: Kluwer Acade Mic, 1998.

[4] Esteva F, Godo L. Monoidal t – norm based logic: towards logic for left-continuous t-norms[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 124:271 – 288.

[5] 吴洪博,周建仁.计量逻辑中真度的均值表示形式及应用[J].电子学报,2012 40(9):1823 – 1828.
Wu hongbo, Zhou jianren. The form of mean representation of truth degree with applications in quantitative logic[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(9):1823 – 1828.(in Chinese)

[6] 王国俊,宋建社.命题逻辑中的程度化方法[J].电子学报,2006,34(2):252 – 257.
Wang guojun, Song jianshe. Graded method in propositional logic[J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(2):252 – 257.(in Chinese)

[7] 李壁镜,王国俊.正则蕴涵算子所对应的逻辑伪度量空间[J].电子学报,2010,38(3):497 – 502.
Li bijing, Wang guojun. Logic pseudo-metric spaces of regular implication operators[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(3):497 – 502.(in Chinese)

[8] Elkan C. The paradoxical success of fuzzy logic[J]. IEEE Expert, 1994, 9:47 – 49.

[9] Liu B. Uncertainty Theory: A Branch of Mathematics for Modeling Human Uncertainty[M]. Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[10] Zhang X. Duality and Pseudo duality of dual disjunctive nrmal forms[J]. Knowledge – based Systems, 2011, 24: 1033 – 1036.

[11] Flaminio T, Marchioni. E. T-norm based logics with an independent involutive negation[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157:3125 – 3144.

[12] Lawry J. A framework for linguistic modeling[J]. Artificial Intelligence, 2004, 155:1 – 39.

[13] Lawry J, Tang Y. Uncertainty modeling for vague concepts: A prototype theory approach[J]. Artificial Intelligence, 2009, 173:1539 – 1558.

[14] 张兴芳,胡凯,李令强,孟广武.同主语同标签 Vague 命题的 Lawry 逻辑[J].系统科学与数学,2013,33:1 – 10.
Zhang xingfang, Hu kai, Li lingqiang, Meng guangwu. Vague propositional lawry logic for same subject under same label[J]. Journal of System Science and Mathematical, 2013, 33:1 – 10.(in Chinese)

[15] 王国俊.数理逻辑引论与归结原理.第二版[M].北京:科学出版社,2006.
Wang guojun. Introduction to Mathematical Logic and Resolution Principle[M]. Beijing: Science press, 2006.(in Chinese)

作者简介

张兴芳 女,1957 年生于山东阳谷.教授,研究生导师.研究方向为非经典数理逻辑与近似推理.
E-mail:zhangxingfang2005@126.com

胡 凯 男,1980 年生于山东淄博.博士,讲师.研究方向为非经典数理逻辑与近似推理.